REDUCEによるLax pairの計算(数式処理と数学研究への応用)

伊藤, 雅明

数理解析研究所講究録
520巻 1984年 135-139

REDUCE による Lax pair の計算

広大 工　伊藤雅明 (Masaaki Ito)

数式処理システムREDUCEのソリトン理論への応用の一つとして，非線形発展方程式のLax pairを計算するプログラムを紹介する。

1．Lax pair

ソリトン理論における重要な発見の一つとして非線形発展方程式の初期値問題を解く逆散乱法があげられる。 この方法はLax によって理論が定式化され，その後，差分方程式への拡張もなされてきた。まず逆散乱法の概要を見ることにする。

次のような一般的な非線形発展方程式（Kは非線形演算子）を考える，

$$u_t = K[u]. \tag{1}$$

この方程式の初期値問題を解くためには，（1）式に等価なLax Pair 表現

$$L_t = [B, L] \tag{2}$$

を見付けなければならない。 ここでL及びBは線形の演算子であり，多くの場合マトリクス型の微分演算子である。 （2）式を解く代りに次のような固有値問題を導入する，

$$L\phi = \lambda\phi. \tag{3}$$

固有関数ϕの時間依存性は

$$\phi_t = B\phi \tag{4}$$

で支配されるとすると，固有値λは時間に依存しないことが示される。 又逆に，（3）式と（4）式の両立条件より，（2）式即ち（1）式がえられる。

ここで，（1）式の初期値u（x,t =0）が与えられると，（3）式よりϕに対する

散乱データを求め，その時間発展は（4）式を使って計算することができる。 このようにして求められた散乱データを使ってLax 演算子 L にたいする逆問題を解き，u（x,t）を構成する。

勿論，このような逆散乱法にも問題が無い訳ではない。例えば，逆問題が解けないかもしれない。しかし，Lax 演算子 L及びBは，非線形方程式の保存量，高次方程式，Bäcklund変換等と密接な関係を持っており，Lax pair を見付けることは方程式の性質を知る上で非常に重要である。

Lax pairを見付ける方法の一つとして，次のような方法があげられる。

（I） Lax operator $L=(L_{ij})$，$B=(B_{ij})$ を次のように仮定する，

$$L_{ij}=\sum_{k=0}^{m_{ij}} C_k^{ij}\,\partial_x^k \qquad (5)$$

$$B_{ij}=\sum_{k=0}^{l_{ij}} D_k^{ij}\,\partial_x^k \qquad (6)$$

ここで C_k^{ij} D_k^{ij} はuの微分多項式の未知関数とする。

（I I） （5）及び（6）式に対するLax pair表現（2）を計算し，これが（1）式と等価になるように C_k^{ij} D_k^{ij} を決める。

この方法は高次又は多変数の方程式に対しては膨大な計算を要するため，計算機に頼らざるをえない。 そこでLax pairを計算するREDUCEプログラムを紹介する。

2. REDUCEプログラム

プログラムを容易にするためにLax pair表現（2）を次のように書き換える，

$$[L1,\ L2]=0. \qquad (7)$$

但し

$$L1=L-\lambda,$$

$$L2=\partial_t-B.$$

ここでは，L1＝（$L1_{ij}$）及びL2＝（$L2_{ij}$）が$n \times n$のマトリクスの微分演算子であるとき，これらの交換子〔L1，L2〕を計算するREDUCEプログラムCOMMS を示す。

差分演算子への拡張及び計算機への入力を容易にするために次のように表記する。

本文	プログラム COMMS
x，t	X，T
$\partial_x^m \partial_t^n$	H（M，N）
$\partial_x^m \partial_t^n u$	U（M，N）
$\partial_x^m \partial_t^n \phi_i$	P（I，M，N）
L1 ，L2	L1（I，J），L2（I，J）

プログラムのリストは次の通りである。

```
OPERATOR M1,M2,MM,F,L1,L2,P¥

PROCEDURE COMMS(N);
BEGIN
   FOR ALL I,J,R LET
      M1(I,J,R)=SUB(F(X,T)=R,L1(I,J)),
      M2(I,J,R)=SUB(F(X,T)=R,L2(I,J));
   FOR L:=1:N DO
      MM(L):=
         FOR J:=1:N SUM
            FOR K:=1:N SUM
               M1(L,J,M2(J,K,P(K,0,0)))-M2(L,J,M1(J,K,P(K,0,0)))¥
   WRITE "*** RESULTS ARE STORED IN MM(1)-MM(",N,") ***"¥
   RETURN NIL
END;
COMMENT DEFINITION OF OPERATORS¥
OPERATOR U,V,H;

FOR ALL N,M,L LET H(N,M)=DF(F(X,T),X,N,T,M),
   DF(V(N,M),X)=V(N+1,M),DF(V(N,M),T)=V(N,M+1),
   DF(U(N,M),X)=U(N+1,M),DF(U(N,M),T)=U(N,M+1),
   DF(P(L,N,M),X)=P(L,N+1,M),DF(P(L,N,M),T)=P(L,N,M+1);
```

3. 使用例

L1 (I, J), L2 (I, J)　(I, J=1, N) に仮定したLax pairを代入しCOMMS (N) を実行する。 結果はMM (1) ～MM (N) に代入される。

(1) K-dV 方程式.

$$u_t - 6uu_x + u_{3x} = 0$$

$$L1 = \partial_x^2 - (u - \lambda)$$

$$L2 = i(\ \partial_t + 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x\ )$$

```
COMMENT *** EXAMPLE 1 : K-DV EQUATION *** ¥
L1(1,1):=-H(2,0)+(U(0,0)-R)*H(0,0)¥

L2(1,1):=I*H(0,1)+4*I*H(3,0)-6*I*U(0,0)*H(1,0)-3*I*U(1,0)*H(0,0)¥

F(1):=(U(0,0)-R)*P(1,0,0)¥

IF ARB M>1 AND ARB N AND ARB L LET P(L,M,N)=DF(F(L),X,M-2,T,N)¥

COMMS(1)¥

*** RESULTS ARE STORED IN MM(1)-MM(1) ***
MM(1);

P(1,0,0)*I*( - U(3,0) + 6*U(1,0)*U(0,0) - U(0,1))
```

(2) modified K-dV eq.

$$u_t + 6u^2u_x + u_{3x} = 0$$

$$L1 = \begin{pmatrix} -\lambda & -i\partial_x + u \\ i\partial_x + u & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$L2 = \begin{pmatrix} i(\partial_t + 4\partial_x^3 + 6A\partial_x + 3A_x) & 0 \\ 0 & i(\partial_t + 4\partial_x^3 + 6B\partial_x + 3B_x) \end{pmatrix}$$

ただし　$A = u^2 - iu_x$, $B = u^2 + iu_x$

```
COMMENT *** EXAMPLE 2 : MODIFIED K-DV EQUATION *** ¥
A:=U(0,0)**2-I*U(1,0)¥

B:=U(0,0)**2+I*U(1,0)¥

L1(1,1):=-R*H(0,0)¥

L1(1,2):=-I*H(1,0)+U(0,0)*H(0,0)¥

L1(2,1):=I*H(1,0)+U(0,0)*H(0,0)¥

L1(2,2):=-R*H(0,0)¥

L2(1,1):=I*(H(0,1)+4*H(3,0)+6*A*H(1,0)+3*DF(A,X)*H(0,0))¥

L2(1,2):=0¥

L2(2,1):=0¥

L2(2,2):=I*(H(0,1)+4*H(3,0)+6*B*H(1,0)+3*DF(B,X)*H(0,0))¥

F(1):=I*(U(0,0)*P(1,0,0)-R*P(2,0,0))¥

F(2):=I*(R*P(1,0,0)-U(0,0)*P(2,0,0))¥

IF ARB M>0 AND ARB N AND ARB L LET P(L,M,N)=DF(F(L),X,M-1,T,N)¥

COMMS(2)¥

*** RESULTS ARE STORED IN MM(1)-MM(2) ***
MM(1);

                                              2
P(2,0,0)*I*( - U(3,0) - 6*U(1,0)*U(0,0)  - U(0,1))
MM(2);

                                              2
P(1,0,0)*I*( - U(3,0) - 6*U(1,0)*U(0,0)  - U(0,1))
```